Baltic Way 2019

Szczecin, Poland

Den 17 november, 2019

Version: Swedish

Tillåten tävlingstid: $4\frac{1}{2}$ timmar.
Under de första 30 minuterna kan ni ställa frågor.
Enbart verktyg för att skriva och rita är tillåtna.

Problem 1. Låt x, y och z vara icke-negativa reella tal sådana att $x \geq y$. Visa att

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x - y)\sqrt{xyz}.$$

Problem 2. Låt (F_n) vara sekvensen med den rekursiva definition $F_1 = F_2 = 1$ och $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ för $n \geq 2$. Bestäm samtliga heltalspar (x, y) sådana att

$$5F_x - 3F_y = 1.$$

Problem 3. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att

$$f(xf(y) - y^2) = (y + 1)f(x - y)$$

uppfylls för samtliga $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem 4. Bestäm samtliga heltal n för vilka det finns ett heltal $k \geq 2$ och positiva heltal $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sådana att

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \quad \text{och} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

Problem 5. De $2m$ talen

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m + 1)$$

är skrivna på en svart tavla, där $m \geq 2$ är ett heltal. Ett *drag* består av att välja tre av talen, a, b, och c, ta bort dessa från tavlan, och skriva dit talet

$$\frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

Efter $m - 1$ sådana drag kommer det endast finnas två tal skrivna på tavlan. Antag att det ena av dessa är $\frac{4}{3}$. Visa att det andra är större än 4.

Problem 6. Alice och Bob spelar följande spel. De börjar med att skriva uttrycken $x + y$, $x - y$, $x^2 + xy + y^2$ och $x^2 - xy + y^2$ på olika kort. De fyra korten blandas sedan och placeras upp och ner på ett bord. Ett av korten vänds upp, så att man kan se uttrycket som står skrivet på det. Därefter väljer Alice två av de fyra korten, och ger de andra två till Bob. Alla kort vänds sedan upp. Nu väljer Alice en av variablerna x och y och tilldelar det ett reellt värde. Hon berättar för Bob vilket värde hon tilldelade, och till vilken variabel. Därefter tilldelar Bob ett reellt värde till den andra variabeln.

Slutligen utvärderar både Alice och Bob produkten av uttrycken på deras respektive valda kort. Den vars värde är störst vinner. Vilken spelare, om någon, har en vinnande strategi?

Problem 7. Hitta det minsta heltalet $k \geq 2$ sådant att för varje partition av mängden $\{2, 3, \ldots, k\}$ i två delar, innehåller minst en av dessa delar tre (inte nödvändigtvis olika) tal a, b och c där $ab = c$.

Problem 8. Landet Balticwayland har 2019 städer. Det finns dubbelriktade vägar mellan vissa par av städer. Inga vägar i landet korsar varandra. För varje par av städer A och B kan man köra från A till B genom att använda högst 2 vägar.

I landet finns det 62 poliser som försöker fånga en skurk. Poliserna och skurken känner hela tiden till varandras positioner. Varje natt kan skurken välja att stanna kvar i den stad hon befinner sig i, eller ta en av de anslutande vägarna till en grannstad. Under dagen kan varje polis göra samma val att stanna eller köra till en grannstad. Innan de gör detta har poliserna möjlighet att koordinera sina förflyttningar med varandra. Skurken fångas om hon vid någon tidpunkt befinner sig i samma stad som en polis.

Visa att poliserna alltid kan fånga skurken.

Problem 9. För ett positivt heltal n, betrakta alla ickeökande funktioner $f\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$. Vissa av dessa funktioner har en fixpunkt (d.v.s. ett c sådant att $f(c) = c$), medan andra inte har det. Bestäm skillnaden mellan storlekarna av dessa två klasser av funktioner.

Anmärkning. En funktion f är *ickeökande* om $f(x) \geq f(y)$ gäller för samtliga $x \leq y$.

Problem 10. I planet är 2019 punkter givna. Ett barn vill rita k slutna cirkelskivor på så vis, att för alla par av skilda punkter finns en cirkelskiva som innehåller exakt en av de två punkterna. Vilket är det minsta tal k sådant att det för varje given positionering av punkter är möjligt att rita k cirkelskivor med ovanstående egenskap?

Problem 11. Låt ABC vara en triangel där $AB = AC$. Låt M vara mittpunkten på BC. Låt cirklarna med diametrar AC och BM skära varandra i punkterna M och P. Låt MP skära AB i Q. Låt R vara en punkt på AP sådan att $QR \parallel BP$. Visa att CP är en bisektris till $\angle RCB$.

Problem 12. Låt ABC vara en triangel och H höjdernas skärningspunkt. Låt D vara en punkt på sträckan AC och låt E vara punkten på linjen BC sådan att $BC \perp DE$. Visa att $EH \perp BD$ om och endast om BD skär sträckan AE i dess mittpunkt.

Problem 13. Låt $ABCDEF$ vara en konvex sexhörning i vilken $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ och $\angle ABC = \angle EFA = 90^\circ$. Visa att $AD \perp CE$.

Problem 14. Låt ABC vara en triangel där $\angle ABC = 90^\circ$, och låt H vara fotpunkten av höjden från B. Punkterna M och N är mittpunkterna på sträckorna AH respektive CH. Låt P och Q vara de andra skärningspunkterna av triangel ABC:s omcirkel med linjerna BM och BN. Sträckorna AQ och CP skär varandra i punkten R. Visa att linjen BR skär NM i dess mittpunkt.

Problem 15. Låt $n \geq 4$, och betrakta en (inte nödvändigtvis konvex) polygon $P_1P_2\ldots P_n$ i planet. Antag att, för varje P_k, finns det ett entydigt bestämt hörn $Q_k \neq P_k$ bland $P_1,\ldots,P_n$ som ligger närmast P_k. Polygonen sägs vara *lömsk* om $Q_k \neq P_{k\pm1}$ för alla k (där $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Visa att ingen lömsk polygon är konvex.
(b) Bestäm alla $n \geq 4$ för vilka det finns en lömsk n-hörning.

Problem 16. För ett positivt heltal N, låt $f(N)$ vara antalet ordnade par av positiva heltal (a, b) sådana att talet

$$\frac{ab}{a+b}$$

delar N. Visa att $f(N)$ är ett kvadrattal.

Problem 17. Låt p vara ett udda primtal. Visa att det för varje heltal c finns ett heltal a sådant att

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

Problem 18. Låt a, b, och c vara udda positiva heltal sådana att a inte är ett kvadrattal och

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Visa att åtminstone ett av talen $b^2 + b + 1$ och $c^2 + c + 1$ är ett sammansatt tal.

Problem 19. Visa att ekvationen $7^x = 1 + y^2 + z^2$ saknar positiva heltalslösningar.

Problem 20. Betrakta ett polynom $P(x)$ med heltalskoefficienter som uppfyller

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40, \quad \text{and} \quad P(-5) = -156.$$

Vad är det största antalet heltal x som uppfyller

$$P(P(x)) = x^2?$$