Длительность олимпиады: 4,5 часа.

Вопросы по условиям: в течение первых 30 минут.

Разрешается использовать только письменные и чертежные принадлежности.

Задача 1. Неотрицательные вещественные числа x, y и z удовлетворяют условию $x \geqslant y$. Докажите неравенство
$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geqslant (x-y)\sqrt{xyz}.$$

Задача 2. Последовательность F_n задана рекуррентно $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Найдите все такие натуральные числа x и y, что $5F_x - 3F_y = 1$.

Задача 3. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$
$$f\big(xf(y) - y^2\big) = (y+1)f(x-y).$$

Задача 4. Найдите все целые числа n, для которых существует натуральное число $k \geqslant 2$ и такие натуральные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_k, что
$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \qquad \text{и} \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

Задача 5. Дано натуральное число $m \geqslant 2$. На доске написано $2m$ чисел
$$1 \cdot 2, \quad 2 \cdot 3, \quad 3 \cdot 4, \quad \ldots, \quad 2m \cdot (2m+1).$$
За один ход можно выбрать три числа a, b, c, стереть их с доски и написать вместо них число
$$\frac{abc}{ab+bc+ca}.$$
После $m-1$ хода на доске осталось только два числа. Пусть одно из них равно $\frac{4}{3}$. Докажите, что другое больше чем 4.

Задача 6. Алиса и Боб играют в следующую игру. Они пишут выражения $x+y$, $x-y$, x^2+xy+y^2 и x^2-xy+y^2 — каждое на отдельной карточке. После этого они перемешивают эти четыре карточки и выкладывают их на стол чистой стороной вверх. Одну из карточек переворачивают надписью вверх. Затем Алиса берет себе любые две карточки из этих четырех, а две другие достаются Бобу. Взятые карточки выкладывают надписями вверх, оба игрока их видят. Далее Алиса выбирает себе переменную x или y, назначает ей вещественное значение и сообщает Бобу, какую переменную она выбрала и какое значение назначила. После этого Боб назначает вещественное значение для второй переменной.

Наконец, игроки подсчитывают произведения чисел на своих карточках. Тот, у кого произведение чисел больше, выиграл. У кого из игроков имеется выигрышная стратегия (если она вообще существует)?

Задача 7. Найдите наименьшее натуральное $k \geqslant 2$, для которого каждая раскраска множества $\{2, 3, \ldots, k\}$ в два цвета содержит одноцветные (не обязательно различные) числа a, b и c, для которых $ab = c$.

Задача 8. В Балтиквейнии 2019 городов. Некоторые пары городов соединены непересекающимися двусторонними дорогами, каждая из которых соединяет два города. Известно, что для каждой пары городов A и B можно добраться из A в B, проехав не более чем по двум дорогам. За вором гоняются 62 копа. В любой момент все персонажи знают, в каком городе находится каждый из остальных. Каждую ночь вор может остаться в городе, где находится, либо переехать по дороге в соседний город. Каждый день каждый коп также может либо остаться, либо переехать в соседний город, причём копы координируют свои действия. Вор считается пойманным, если окажется в одном городе с копом. Докажите, что копы смогут поймать вора.

Задача 9. Для натурального числа n рассмотрим все невозрастающие функции $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Подсчитаем, сколько из них имеют неподвижную точку (т. е. такое c, для которого $f(c) = c$), а сколько не имеют. Найдите разность этих количеств.

Замечание. Функция f называется *невозрастающей*, если $f(x) \geqslant f(y)$ при всех $x \leqslant y$.

Задача 10. На плоскости дано 2019 точек. Малыш хочет так нарисовать k (замкнутых) кругов, чтобы для любых двух различных точек нашелся круг, содержащий ровно одну из них. При каком наименьшем k для любой начальной расстановки 2019 точек можно нарисовать k кругов, для которых указанное свойство выполняется?

Задача 11. Точка M — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Окружности, построенные на AC и на BM как на диаметрах, пересекаются в точках M и P. Прямая MP пересекает прямую AB в точке Q. На прямой AP выбрали такую точку R, что прямые QR и BP параллельны. Докажите, что прямая CP — биссектриса угла $\angle RCB$.

Задача 12. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. На стороне AC выбрана точка D, а на прямой BC выбрана такая точка E, что прямые BC и DE перпендикулярны. Докажите, что прямые EH и BD перпендикулярны тогда и только тогда, когда прямая BD делит отрезок AE пополам.

Задача 13. Стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ удовлетворяют равенствам $AB = AF$, $BC = CD$ и $DE = EF$, кроме того, $\angle ABC = \angle EFA = 90^\circ$. Докажите, что прямые AD и CE перпендикулярны.

Задача 14. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом $\angle ABC$. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины B на гипотенузу AC. Точки M и N — середины отрезков AH и CH соответственно. Прямые BM и BN вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q соответственно. Отрезки AQ и CP пересекаются в точке R. Докажите, что прямая BR проходит через середину отрезка MN.

Задача 15. Пусть $n \geqslant 4$. Рассмотрим на плоскости (не обязательно выпуклый) многоугольник $P_1P_2 \ldots P_n$. Предположим, что для каждой вершины P_k среди вершин P_1, P_2, …, P_n найдется единственная вершина $Q_k \neq P_k$, находящаяся ближе всего к P_k. Назовем многоугольник $P_1P_2 \ldots P_n$ *колючим*, если $Q_k \neq P_{k\pm1}$ при всех k (мы считаем, что $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$).

a) Докажите, что не существует выпуклых колючих многоугольников.

b) Найдите все $n \geqslant 4$, для которых существует колючий n-угольник.

Задача 16. Дано натуральное число N. Через $f(N)$ обозначим количество упорядоченных пар натуральных чисел (a, b), для которых число $\dfrac{ab}{a+b}$ является делителем N. Докажите, что каким бы ни было число N величина $f(N)$ является точным квадратом.

Задача 17. Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что для любого целого числа c найдется такое целое число a, что

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

Задача 18. Пусть a, b и c — нечетные натуральные числа, причем a не является точным квадратом и

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $b^2 + b + 1$ и $c^2 + c + 1$ составное.

Задача 19. Докажите, что уравнение $7^x = 1 + y^2 + z^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Задача 20. Рассмотрим многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющий условиям

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40 \quad \text{и} \quad P(-5) = -156.$$

Выясните, какое наибольшее количество целых x может удовлетворять соотношению $P(P(x)) = x^2$.