Baltic Way 2019
Szczecin, Poland

17 listopada 2019 r.
Version: Polish

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Pytania można zadawać w ciągu początkowych 30 minut.
Dopuszczalne jest posiadanie jedynie przyborów do pisania i rysowania.

Zadanie 1. Nieujemne liczby rzeczywiste x, y, z, spełniają warunek $x \geqslant y$. Dowieść, że

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geqslant (x - y)\sqrt{xyz}.$$

Zadanie 2. Ciąg (F_n) jest określony przez warunki: $F_1 = F_2 = 1$ oraz $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n \geqslant 2$. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (x, y) spełniających równość $5F_x - 3F_y = 1$.

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość

$$f(xf(y) - y^2) = (y + 1)f(x - y).$$

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite n, że istnieje liczba całkowita $k \geqslant 2$ oraz dodatnie liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_k$ spełniające równości

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

Zadanie 5. Na tablicy zapisano $2m$ liczb

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m + 1),$$

gdzie $m \geqslant 2$ jest liczbą całkowitą. *Ruchem* nazywamy wybranie trzech liczb a, b, c, zmazanie ich z tablicy, a następnie umieszczenie na tablicy liczby

$$\frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

Po $m - 1$ ruchach na tablicy pozostaną tylko dwie liczby. Zakładając, że jedna z nich wynosi $\frac{4}{3}$, wykazać, że druga z nich jest większa od 4.

Zadanie 6. Jaś i Małgosia grają w następującą grę. Na początku zapisują wyrażenia $x + y$, $x - y$, $x^2 + xy + y^2$ oraz $x^2 - xy + y^2$, każde na jednej z czterech kart. Następnie tasują te karty i kładą na stole napisem do dołu. Jedna z kart jest odsłaniana, ukazując napisane na niej wyrażenie. Później Małgosia zabiera dowolne dwie z czterech kart i daje pozostałe Jasiowi. W tym momencie wszystkie karty są odsłaniane. Potem Małgosia wybiera jedną ze zmiennych x oraz y, przypisuje jej dowolnie wybraną liczbę rzeczywistą i mówi Jasiowi, jaką wartość przypisała i do której zmiennej. Następnie Jaś przypisuje dowolnie wybraną liczbę rzeczywistą do drugiej zmiennej.

Na koniec, oboje obliczają iloczyn wyrażeń zapisanych na swoich dwóch kartach. Wygrywa ten, kto otrzyma większy wynik. Czy któryś z graczy posiada strategię wygrywającą? Jeśli tak, to który?

Zadanie 7. Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą $k \geqslant 2$, taką że dla każdego podziału zbioru $\{2, 3, \ldots, k\}$ na dwie części, co najmniej jedna z nich zawiera (niekoniecznie różne) liczby a, b oraz c spełniające równość $ab = c$.

Zadanie 8. W kraju Balticwayland jest 2019 miast. Niektóre pary tych miast są połączone nieprzecinającymi się, dwukierunkowymi drogami, przy czym każda droga łączy dokładnie dwa miasta. Wiadomo, że dla każdej pary miast A oraz B można dostać się z miasta A do miasta B używając co najwyżej 2 dróg. W pościgu za złodziejem bierze udział 62 policjantów. Policjanci i złodziej znają nawzajem swoje położenia w każdym momencie pościgu. Każdej nocy złodziej wybiera, czy zostaje w tym samym mieście, czy ucieka do innego sąsiedniego miasta bezpośrednią drogą. Każdego dnia, każdy policjant ma taki sam wybór — zostać lub udać się do sąsiedniego miasta. Policjanci mogą koordynować swoje działania. Złodziej jest schwytany, jeśli jest z którymś z policjantów w tym samym mieście w tym samym czasie. Udowodnić, że policjanci zawsze mogą złapać złodzieja.

Zadanie 9. Dla dodatniej liczby całkowitej n rozważmy wszystkie nierosnące funkcje $f\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$. Niektóre z nich posiadają punkt stały (tzn. takie c, że $f(c) = c$), a niektóre nie. Wyznaczyć różnicę pomiędzy mocami tych zbiorów funkcji.

Uwaga. Funkcja f jest *nierosnąca*, jeśli $f(x) \geqslant f(y)$, o ile $x \leqslant y$.

Zadanie 10. Danych jest 2019 punktów na płaszczyźnie. Tomuś chce narysować k (domkniętych) kół w taki sposób, że dla dowolnych dwóch różnych punktów istnieje koło, które zawiera dokładnie jeden z tych dwóch punktów. Jakie jest minimalne k, takie że dla dowolnej początkowej konfiguracji punktów Tomuś może narysować k kół, które będą spełniać powyższą własność?

Zadanie 11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = AC$. Punkt M jest środkiem boku BC. Okręgi o średnicach AC i BM przecinają się w punktach M i P. Proste MP i AB przecinają się w punkcie Q. Punkt R leży na prostej AP, przy czym $QR \parallel BP$. Dowieść, że prosta CP jest dwusieczną kąta RCB.

Zadanie 12. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Punkt D leży na boku AC, a punkt E leży na prostej BC, przy czym $BC \perp DE$. Wykazać, że $EH \perp BD$ wtedy i tylko wtedy, gdy prosta BD przechodzi przez środek odcinka AE.

Zadanie 13. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ oraz $\angle ABC = \angle EFA = 90^\circ$. Udowodnić, że $AD \perp CE$.

Zadanie 14. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ABC = 90^\circ$. Punkt H jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka B. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AH i CH. Okrąg opisany na trójkącie ABC przecina po raz drugi proste BM i BN odpowiednio w punktach P i Q. Odcinki AQ i CP przecinają się w punkcie R. Wykazać, że prosta BR przechodzi przez środek odcinka MN.

Zadanie 15. Rozważmy na płaszczyźnie (niekoniecznie wypukły) wielokąt $P_1P_2\ldots P_n$, przy czym $n \geqslant 4$. Załóżmy, że dla każdego P_k dokładnie jeden wierzchołek $Q_k \neq P_k$ spośród wierzchołków $P_1,\ldots,P_n$ jest mu najbliższy. Wielokąt nazwiemy *dzikim*, jeśli $Q_k \neq P_{k\pm1}$ dla wszystkich k (przyjmujemy $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Wykazać, że nie istnieje dziki wielokąt, który jest wypukły.
(b) Znaleźć wszystkie $n \geqslant 4$, dla których istnieje dziki wielokąt o n wierzchołkach.

Zadanie 16. Dla dodatniej liczby całkowitej N, niech $f(N)$ będzie liczbą uporządkowanych par dodatnich liczb całkowitych (a,b), dla których liczba
$$\frac{ab}{a+b}$$
jest dzielnikiem liczby N. Udowodnić, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej N liczba $f(N)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 17. Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej c istnieje taka liczba całkowita a, że
$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

Zadanie 18. Dane są takie dodatnie nieparzyste liczby całkowite a, b i c, że liczba a nie jest kwadratem liczby całkowitej oraz
$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$
Dowieść, że co najmniej jedna z liczb $b^2 + b + 1$ oraz $c^2 + c + 1$ jest złożona.

Zadanie 19. Udowodnić, że równanie $7^x = 1 + y^2 + z^2$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Zadanie 20. Rozważmy wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, dla którego
$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40, \quad \text{and} \quad P(-5) = -156.$$
Jaka jest największa możliwa liczba liczb całkowitych x spełniających
$$P(P(x)) = x^2?$$