Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter.
Spørsmål kan stilles de første 30 minuttene.
Kun skrive- og tegneredskaper tillatt.

Oppgave 1. For alle ikke-negative reelle tall x, y, z med $x \geq y$, vis ulikheten

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x - y)\sqrt{xyz}.$$

Oppgave 2. La (F_n) være den rekursivt definerte følgen gitt ved $F_1 = F_2 = 1$ og $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ for $n \geq 2$. Finn alle par av positive heltall (x, y) slik at

$$5F_x - 3F_y = 1.$$

Oppgave 3. Finn alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at vi for alle $x, y \in \mathbb{R}$ har at

$$f(xf(y) - y^2) = (y + 1)f(x - y)$$

Oppgave 4. Bestem alle heltall n for hvilke det eksisterer et heltall $k \geq 2$ og positive heltall $x_1, x_2, \ldots, x_k$ slik at

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \quad \text{og} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

Oppgave 5. De $2m$ tallene

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m + 1)$$

står skrevet på en tavle, der $m \geq 2$ er et heltall. Et *trekk* består av å velge tre tall a, b og c, viske dem fra tavlen og i stedet skrive tallet

$$\frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

Etter $m - 1$ trekk er det kun to tall igjen på tavlen. Gitt at et av disse er $\frac{4}{3}$, vis at det andre er større enn 4.

Oppgave 6. Alice og Bob spiller følgende spill. De skriver uttrykkene $x + y$, $x - y$, $x^2 + xy + y^2$ og $x^2 - xy + y^2$ på hvert sitt kort. De fire kortene stokkes og legges opp ned på et bord. Ett av kortene vendes opp slik at uttrykket skrevet på det blir synlig. Etter dette velger Alice to vilkårlige av de fire kortene, og gir de to andre til Bob. Så vendes alle kortene opp. Deretter velger Alice én av variablene x og y, gir den en reell verdi, og forteller Bob hvilken verdi og hvilken variabel hun har valgt. Så gir Bob den andre variabelen en reell verdi.

Til slutt regner begge ut produktet av uttrykkene på de to kortene sine. Den som får det største resultatet vinner. Hvilken spiller, om noen, har en vinnende strategi?

Oppgave 7. Finn det minste heltallet $k \geq 2$ slik at for enhver partisjon av mengden $\{2, 3, \ldots, k\}$ i to deler inneholder minst én av dem tre (ikke nødvendigvis forskjellige) tall a, b og c med $ab = c$.

Oppgave 8. I Balticwayland finnes det 2019 byer. Veinettet består av to-veis direkteforbindelser mellom par av byer som ikke krysser hverandre, der hver vei forbinder nøyaktig 2 byer. Det er kjent at for ethvert par av byer A og B er det mulig å kjøre fra A til B ved bruk av høyst 2 veier. Det er 62 konstabler som prøver å fange en røver. Konstablene og røveren kjenner til enhver tid til hverandres posisjoner. Hver kveld velger røvereren enten å forbli i byen hun er i eller å kjøre til en naboby via en direkteforbindelse. Hver morgen har hver konstabel det samme valget mellom å bli eller å forflytte seg, og de kan koordinere valgene sine. Røveren blir tatt dersom hun på noe som helst tidspunkt befinner seg i samme by som en konstabel. Vis at konstablene alltid kan fange røveren.

Oppgave 9. For et positivt heltall n, betrakt alle ikke-økende funksjoner $f\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$. Enkelte av dem har et fikspunkt (dvs. en c slik at $f(c) = c$), mens andre har ikke det. Bestem differansen mellom størrelsene på disse to mengdene funksjoner.

Bemerkning. En funksjon f er *ikke-økende* dersom $f(x) \geq f(y)$ gjelder for alle $x \leq y$.

Oppgave 10. Det er gitt 2019 punkter i planet. En smårolling vil tegne k (lukkede) sirkelskiver på en slik måte at det for ethvert par av forskjellige punkter finnes en sirkelskive som inneholder nøyaktig ett av dem. Hva er minste mulige verdi av k slik at det for enhver konfigurasjon av punkter er mulig å tegne k sirkelskiver med egenskapen nevnt ovenfor?

Oppgave 11. La ABC være en trekant der $AB = AC$. La M være midtpunktet på BC. La sirklene med diametre AC og BM skjære hverandre i punktene M og P. La MP skjære AB i Q. La R være et punkt på AP slik at $QR \parallel BP$. Vis at CP halverer $\angle RCB$.

Oppgave 12. La ABC være en trekant med ortosenter H. La D være et punkt på linjestykket AC og E være et punkt på linjen BC slik at $BC \perp DE$. Vis at $EH \perp BD$ hvis og bare hvis BD halverer AE.

Oppgave 13. La $ABCDEF$ være en konveks sekskant der $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ og $\angle ABC = \angle EFA = 90°$. Vis at $AD \perp CE$.

Oppgave 14. La ABC være en trekant der $\angle ABC = 90°$, og la H være fotpunktet til høyden fra B. Punktene M og N er henholdsvis midtpunktene på linjestykkene AH og CH. La P og Q være de andre skjæringspunktene mellom omsirkelen til trekant ABC og henholdsvis linjene BM og BN. Linjestykkene AQ og CP skjæres i punktet R. Vis at linjen BR går gjennom midtpunktet på linjestykke MN.

Oppgave 15. La $n \geq 4$, og betrakt et (ikke nødvendigvis konvekst) polygon $P_1P_2\dots P_n$ i planet. Anta at det for enhver P_k finnes ett unikt hjørne $Q_k \neq P_k$ blant $P_1,\dots,P_n$ som ligger den nærmest. Vi sier at polygonet er *fiendtlig* dersom $Q_k \neq P_{k\pm1}$ for alle k (der $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Vis at intet fiendtlig polygon er konvekst.
(b) Finn alle $n \geq 4$ slik at det finnes et fiendtlig n-gon.

Oppgave 16. For et positivt heltall N, la $f(N)$ være antallet ordnede par av positive heltall (a,b) slik at tallet

$$\frac{ab}{a+b}$$

er en divisor av N. Vis at $f(N)$ alltid er et kvadrattall.

Oppgave 17. La p være et odde primtall. Vis at det for ethvert heltall c finnes et heltall a slik at

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

Oppgave 18. La a, b, og c være odde positive heltall slik at a ikke er et kvadrattall og

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Vis at minst ett av tallene $b^2 + b + 1$ og $c^2 + c + 1$ er sammensatt.

Oppgave 19. Vis at likningen $7^x = 1 + y^2 + z^2$ ikke har noen positive heltallsløsninger.

Oppgave 20. La $P(x)$ være et polynom med heltallskoeffisienter som tilfredsstiller

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40, \quad \text{and} \quad P(-5) = -156.$$

Hva er det største mulige antallet heltall x for hvilke

$$P(P(x)) = x^2?$$