Baltic Way 2019

Szczecin, Poland

2019 M. LAPKRIČIO 17 D.
VERSION: LITHUANIAN

LAIKAS SPRENDIMUI: 4 VAL. 30 MIN.
KLAUSIMUS GALIMA UŽDUOTI PER PIRMĄSIAS 30 MINUČIŲ.
LEIDŽIAMA NAUDOTIS TIK RAŠYMO IR BRAIŽYMO PRIEMONĖMIS.

1. Įrodykite, kad jei x, y, z yra realieji neneigiami skaičiai ir $x \geq y$, tai

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x - y)\sqrt{xyz}.$$

2. Seką (F_n) apibrėžia lygybės $F_1 = F_2 = 1$ ir $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, kai $n = 2, 3, \ldots$ Raskite visas tokias natūraliųjų skaičių poras (x, y), kad

$$5F_x - 3F_y = 1.$$

3. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms lygybė

$$f(xf(y) - y^2) = (y + 1)f(x - y)$$

galioja su visais $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Nustatykite visus sveikuosius skaičius n, kuriems egzistuoja toks sveikasis $k \geq 2$ ir tokie natūralieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_k$, kad

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \quad \text{ir} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

5. Lentoje užrašyti $2m$ skaičių

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m + 1).$$

Čia skaičius $m \geq 2$ yra sveikasis. *Ėjimo* metu leidžiama nutrinti bet kuriuos tris lentoje užrašytus skaičius a, b, c ir užrašyti skaičių

$$\frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

Po $m - 1$ ėjimų lentoje liks du skaičiai. Įrodykite: jei vienas iš jų lygus $\frac{4}{3}$, tai kitas yra didesnis už 4.

6. Alytė ir Bronius žaidžia tokį žaidimą. Reiškiniai $x + y$, $x - y$, $x^2 + xy + y^2$ ir $x^2 - xy + y^2$ užrašomi po vieną keturiose kortelėse. Tos kortelės sumaišomos ir užverstos padedamos ant stalo. Viena kortelė atverčiama, kad matytųsi joje užrašytas reiškinys. Alytė pasirenka bet kurias dvi korteles, o Broniui atiduoda likusias dvi. Visos kortelės atverčiamos. Alytė pasirenka vieną iš kintamųjų x ir y bei suteikia jam realiąją reikšmę. Tuos kintamąjį ir jo reikšmę ji atskleidžia Broniui. Tada Bronius suteikia realiąją reikšmę likusiam kintamajam.

Laimi tas, kieno kortelėse esančių dviejų reiškinių reikšmių sandauga yra didesnė. Nustatykite, ar kuris nors žaidėjas turi pergalės strategiją. Jei turi, tai kuris?

7. Raskite mažiausią sveikąjį $k \geq 2$, tenkinantį sąlygą: kad ir kaip padalytume aibę $\{2, 3, \ldots, k\}$ į du nesikertančius poaibius, viename iš jų bus tokie (nebūtinai skirtingi) skaičiai a, b, c, kad $ab = c$.

8. Boltikvėjaus šalyje yra 2019 miestų. Kai kuriuos miestus jungia keliai. Kiekvienas kelias dvikryptis ir jungia lygiai du miestus; jokie du keliai nesikerta. Iš bet kurio miesto A į bet kurį kitą miestą B įmanoma patekti keliavus daugiausiai dviem keliais. Vagį gaudo 62 sekliai. Kiekvieną akimirką sekliai ir vagis žino vieni kitų buvimo vietas. Kas naktį vagis renkasi: arba lieka mieste, kur praleido dieną, arba atvyksta į bet kurį miestą, sujungtą su juo keliu. Kas dieną kiekvienas seklys renkasi: arba lieka mieste, kur praleido naktį, arba atvyksta į bet kurį miestą, sujungtą su juo keliu. Sekliai derina veiksmus tarpusavyje. Vagis, atsidūręs viename mieste su sekliu, tuoj pat suimamas. Įrodykite, kad sekliai visada gali taip keliauti, kad vagis būtų pagautas.

9. Nagrinėkime bet kokį natūralųjį skaičių n ir visas nedidėjančias funkcijas $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Kai kurios iš jų turi nejudamą tašką (tokią argumento reikšmę c, kad $f(c) = c$), o kitos neturi. Raskite funkcijų su nejudamu tašku ir likusių funkcijų skaičių skirtumą.

Pastaba. Funkcija f vadinama *nedidėjančia*, kai $f(x) \geq f(y)$ bet kurioms argumento reikšmėms $x \leq y$.

10. Plokštumoje pažymėta 2019 taškų. Vaikas joje nori taip pasirinkti k skritulių (skritulį sudaro apskritimas ir jo vidus), kad bet kuriems dviems skirtingiems pažymėtiems taškams būtų skritulys, kuriam priklausytų lygiai vienas iš tų dviejų taškų. Kokia yra mažiausia k reikšmė, kuriai vaikas galėtų tai atlikti su kiekviena 2019 taškų aibe?

11. Taškas M dalija trikampio ABC, kuriame $AB = AC$, kraštinę BC pusiau. Apskritimai, kurių skersmenys yra atkarpos AC ir BM, kertasi taškuose M ir P. Tiesės AB ir MP kertasi taške Q. Tiesėje AP pažymėtas toks taškas R, kad $QR \parallel BP$. Įrodykite, kad tiesė CP dalija $\angle RCB$ pusiau.

12. Trikampio ABC aukštinės kertasi taške H. Atkarpoje AC pažymėtas taškas D. Tiesėje BC pažymėtas toks taškas E, kad $BC \perp DE$. Įrodykite, kad $EH \perp BD$ tada ir tik tada, kai tiesė BD dalija atkarpą AE pusiau.

13. Iškilasis šešiakampis $ABCDEF$ tenkina $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ ir $\angle ABC = \angle EFA = 90°$. Įrodykite, kad $AD \perp CE$.

14. Taškas H yra trikampio ABC, kuriame $\angle ABC = 90°$, aukštinės iš viršūnės B pagrindas. Atkarpų AH ir CH vidurio taškai atitinkamai pažymėti M ir N. Tiesės BM ir BN trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą atitinkamai kerta taškuose $P \neq B$ ir $Q \neq B$. Atkarpos AQ ir CP kertasi taške R. Įrodykite, kad tiesė BR eina per atkarpos MN vidurio tašką.

15. Bet kokiam natūraliajam $n \geq 4$ nagrinėkime (nebūtinai iškiląjį) daugiakampį $P_1P_2 \ldots P_n$ plokštumoje. Tarkime, kad kiekvienai jo viršūnei P_k tarp viršūnių $P_1, \ldots, P_n$ egzistuoja vienintelė viršūnė $Q_k \neq P_k$, kuri yra arčiausiai viršūnės P_k. Tokį daugiakampį vadinsime *supriešintu*, jei $Q_k \neq P_{k\pm1}$ visiems k (čia $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Įrodykite, kad joks supriešintas daugiakampis nėra iškilasis.
(b) Raskite visus $n \geq 4$, kuriems egzistuoja supriešintas n-kampis.

16. Kiekvienam natūraliajam N skaičius $f(N)$ parodo, kiek yra natūraliųjų skaičių (sutvarkytų) porų (a, b), kurioms skaičius

$$\frac{ab}{a+b}$$

yra N daliklis. Įrodykite, kad kiekvienas skaičius $f(N)$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

17. Duotas pirminis nelyginis skaičius p. Įrodykite, kad kiekvienam sveikajam skaičiui c egzistuoja toks sveikasis skaičius a, kad

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

18. Duoti tokie nelyginiai natūralieji skaičiai a, b, c, kad a nėra sveikojo skaičiaus kvadratas ir

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Įrodykite, kad bent vienas iš skaičių $b^2 + b + 1$ ir $c^2 + c + 1$ yra sudėtinis.

19. Įrodykite, kad lygtis $7^x = 1 + y^2 + z^2$ neturi natūraliųjų sprendinių.

20. Daugianaris $P(x)$ su sveikaisiais koeficientais tenkina lygybes

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40 \quad \text{ir} \quad P(-5) = -156.$$

Kiek daugiausiai sveikųjų skaičių x gali tenkinti lygybę

$$P(P(x)) = x^2?$$