Baltic Way 2019

Szczecin, Poland

17. nóvember 2019
Version: Icelandic

Tímamörk: $4\frac{1}{2}$ klukkustund.
Spurningar eru leyfðar fyrstu 30 mínúturnar.
Einungis skriffæri og teikniáhöld eru leyfð.

Dæmi 1. Fyrir allar ekki neikvæðar rauntölur x, y, z þar sem $x \geq y$, sannið ójöfnuna

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x - y)\sqrt{xyz}.$$

Dæmi 2. Látum (F_n) vera rununa sem er skilgreind með $F_1 = F_2 = 1$ og $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ fyrir $n \geq 2$. Finnið öll pör jákvæðra heiltalna (x, y) þannig að

$$5F_x - 3F_y = 1.$$

Dæmi 3. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ þannig að

$$f(xf(y) - y^2) = (y + 1)f(x - y)$$

standist fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$.

Dæmi 4. Ákvarðið allar heiltölur n þannig að til séu heiltala $k \geq 2$ og jákvæðar heiltölur $x_1, x_2, \ldots, x_k$ þannig að

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \quad \text{og} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

Dæmi 5. Ritaðar eru $2m$ tölurnar

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m + 1)$$

á krítartöflu, þar sem $m \geq 2$ er heiltala. *Leikur* felst í því að velja þrjár tölur a, b, c, stroka þær út af töflunni og skrifa í staðinn töluna

$$\frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

Eftir $m - 1$ slíka leiki verða einungis tvær tölur eftir á krítartöflunni. Ef gert er ráð fyrir að önnur þeirra sé $\frac{4}{3}$, sýnið þá að hin sé stærri en 4

Dæmi 6. Anna og Baldur spila eftirfarandi leik. Þau skrifa stæðurnar $x + y$, $x - y$, $x^2 + xy + y^2$ og $x^2 - xy + y^2$ þannig að sérhver fari á sitt eigið spil. Spilunum fjórum er stokkað og þau lögð á borð þannig að stæðan snúi niður. Einu spilanna er síðan snúið, þannig að stæðan sjáist. Anna velur þá einhver tvö af spilunum fjórum og gefur Baldri hin tvö. Öll spil eru þá sýnd. Nú velur Anna eina af breytunum x og y, gefur henni rauntölugildi, og segir Baldri hvaða gildi hún gaf og hvaða breytu. Þá gefur Baldur hinni breytunni rauntölugildi.

Að lokum reikna þau margfeldi stæðanna á sínum spilum. Það þeirra sem fær stærra margfeldi sigrar. Ákvarðið hvor leikmanna, ef einhver, á örugga vinningsleið.

Dæmi 7. Finnið minnstu heiltölu $k \geq 2$ þannig að fyrir sérhverja skiptingu á menginu $\{2, 3, \ldots, k\}$ í tvo hluta, innihaldi að minnsta kosti annar hlutanna (ekki endilega ólíkar) tölur a, b og c þannig að $ab = c$.

Dæmi 8. Það eru 2019 borgir í Eystrasaltskeppnislandi. Sum pör borga eru tengd með tvíátta vegum, sem skerast ekki, þannig að sérhver vegur tengir saman nákvæmlega 2 borgir. Vitað er að fyrir sérhvert par borga A og B sé mögulegt að komast frá A til B með því að fara um að hámarki 2 vegi. Lögreglumenn, sem eru 62 talsins, reyna að fanga ræningja. Á sérhverjum tíma vita lögreglumennirnir og ræninginn staðsetningar hvers annars. Sérhverja nótt má ræninginn kjósa að vera áfram í núverandi borg eða að færa sig um einn veg yfir í aðlæga borg. Sérhvern dag fá allir lögreglumennirnir sama val, um að vera um kyrrt eða færa sig og taka þeir sínar ákvarðanir í samráði við hina lögreglumennina. Lögreglan fangar ræningjann ef hún er á einhverjum tíma í sömu borg og ræninginn. Sýnið fram á að lögreglumennirnir geti alltaf á endanum fangað ræningjann.

Dæmi 9. Gefin er jákvæð heiltala n. Lítum á öll minnkandi föll $f\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$. Sum þeirra hafa fastapunkt (þ.e. til er c þannig að $f(c) = c$), önnur ekki. Ákvarðið mismun stærðanna á mengjunum tveim sem innihalda þessi föll.

Ath. Fall f er sagt *minnkandi* ef $f(x) \geq f(y)$ fyrir öll $x \leq y$.

Dæmi 10. Gefnir eru 2019 punktar í planinu. Barni langar að teikna k (lokaðar) hringskífur þannig að, fyrir sérhverja tvo ólíka punkta sé til hringskífa sem inniheldur nákvæmlega annan þeirra. Hvert er minnsta k, þannig að, óháð upphafsstöðu, sé hægt að teikna k hringskífur sem uppfylla ofangreint skilyrði?

Dæmi 11. Látum ABC vera þríhyrning með $|AB| = |AC|$. Látum M vera miðpunkt BC. Látum hringina með miðstrengi AC og BM skerast í punktum M og P. Látum MP skera AB í Q. Látum R vera punkt á AP þannig að $QR \parallel BP$. Sannið að CP helmingi $\angle RCB$.

Dæmi 12. Látum ABC vera þríhyrning og H vera skurðpunkt hæða hans. Látum D vera punkt á strikinu AC og látum E vera punktinn á línunni BC þannig að $BC \perp DE$. Sannið að $EH \perp BD$ þá og því aðeins að BD helmingi AE.

Dæmi 13. Látum $ABCDEF$ vera kúptan sexhyrning þar sem $|AB| = |AF|$, $|BC| = |CD|$, $|DE| = |EF|$ og $\angle ABC = \angle EFA = 90^\circ$. Sannið að $AD \perp CE$.

Dæmi 14. Látum ABC vera þríhyrning með $\angle ABC = 90^\circ$, og látum H vera fótpunkt hæðarinnar frá B. Punktarnir M og N eru miðpunktar strikanna AH og CH, í þeirri röð. Látum P og Q vera aðra skurðpunkta umritaðs hrings um þríhyrninginn ABC við línurnar BM og BN, í þeirri röð. Strikin AQ og CP skerast í punktinum R. Sannið að línan BR liggi um miðpunkt striksins MN.

Dæmi 15. Látum $n \geq 4$, lítum á (ekki nauðsynlega kúptan) marghyrning $P_1P_2\dots P_n$ í planinu. Gerum ráð fyrir að fyrir sérhvern punkt P_k, sé til nákvæmlega einn punktur $Q_k \neq P_k$ meðal $P_1,\dots,P_n$ sem er næstur honum. Marghyrningurinn er sagður vera *óvinveittur* ef $Q_k \neq P_{k\pm 1}$ fyrir öll k (þar sem $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Sannið að enginn óvinveittur marghyrningur sé kúptur.
(b) Finnið öll $n \geq 4$ þannig að til sé óvinveittur n-hyrningur.

Dæmi 16. Fyrir jákvæða heiltölu N, látum $f(N)$ vera fjölda raðaðra tvennda jákvæðra heiltalna (a, b) þannig að talan

$$\frac{ab}{a+b}$$

sé deilir N. Sannið að $f(N)$ sé alltaf ferningstala.

Dæmi 17. Látum p vera prímtölu sem er oddatala. Sýnið að fyrir sérhverja heiltölu c, sé til heiltala a þannig að

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

Dæmi 18. Látum a, b, og c vera gefnar jákvæðar oddatölur þannig að a sé ekki ferningstala og

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Sannið að að minnsta kosti ein talnanna $b^2 + b + 1$ og $c^2 + c + 1$ sé samsett.

Dæmi 19. Sannið að jafnan $7^x = 1 + y^2 + z^2$ hafi engar jákvæðar heiltölulausnir.

Dæmi 20. Lítum á margliðu $P(x)$ með heiltölustuðlum sem fullnægir

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40, \quad \text{og} \quad P(-5) = -156.$$

Hver er mesti mögulegi fjöldi heiltalna x sem uppfylla

$$P(P(x)) = x^2?$$