Bearbeitungszeit: 4,5 Stunden
Fragen können nur während der ersten 30 Minuten gestellt werden.
Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind Zeichen- und Schreibgeräte.

Aufgabe 1. Man zeige, dass die Ungleichung

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x - y)\sqrt{xyz}$$

für alle nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z mit $x \geq y$ gilt.

Aufgabe 2. Sei (F_n) die durch $F_1 = F_2 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ für $n \geq 2$ rekursiv definierte Folge. Man bestimme alle Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen mit

$$5F_x - 3F_y = 1.$$

Aufgabe 3. Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(xf(y) - y^2) = (y + 1)f(x - y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 4. Man bestimme alle ganzen Zahlen n, für die eine ganze Zahl $k \geq 2$ und positive ganze Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019$$

existieren.

Aufgabe 5. Die $2m$ Zahlen

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m + 1)$$

stehen auf einer Tafel, wobei $m \geq 2$ ganzzahlig ist. Ein *Zug* besteht darin, drei Zahlen a, b, c zu wählen, sie von der Tafel zu löschen und die Zahl

$$\frac{abc}{ab + bc + ca}$$

einmal auf die Tafel zu schreiben. Nach $m - 1$ Zügen verbleiben also nur zwei Zahlen auf der Tafel. Man zeige: Ist eine dieser beiden Zahlen $\frac{4}{3}$, so ist die andere größer als 4.

Aufgabe 6. Alice und Bob spielen das folgende Spiel. Sie schreiben jeden der Ausdrücke $x+y$, $x-y$, x^2+xy+y^2 und $x^2 - xy + y^2$ auf je eine Karte. Diese vier Karten werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Nun wird eine der Karten aufgedeckt, so dass der auf ihr stehende Ausdruck zu sehen ist. Danach wählt Alice zwei der vier Karten und gibt Bob die anderen beiden. Anschließend werden alle Karten aufgedeckt. Alice wählt nun eine der Variablen x und y aus, belegt sie mit einem reellen Wert und verrät Bob, welche der Variablen sie belegt hat und mit welchem Wert. Danach belegt Bob die andere Variable mit einem reellen Wert. Schließlich berechnet jeder der beiden das Produkt der Ausdrücke auf seinen beiden Karten. Der Spieler mit dem größeren Ergebnis gewinnt. Hat einer der Spieler eine Gewinnstrategie und wenn ja, welcher?

Aufgabe 7. Man bestimme die kleinste ganze Zahl $k \geq 2$, so dass bei jeder Zerlegung der Menge $\{2, 3, \ldots, k\}$ in zwei Teile in mindestens einem der Teile drei (nicht notwendigerweise verschiedene) Zahlen a, b und c mit $ab = c$ enthalten sind.

Aufgabe 8. Im Balticwayland gibt es 2019 Städte. Einige Städte sind durch Straßen verbunden. Jede Straße verbindet genau zwei Städte und kann in beide Richtungen genutzt werden. Für je zwei Städte A und B kann man unter Benutzung von höchstens zwei Straßen von A nach B gelangen. 62 Polizisten versuchen, einen Räuber zu fangen. Sowohl den Polizisten als auch dem Räuber sind zu jedem Zeitpunkt die Aufenthaltsorte aller anderen bekannt. Jede Nacht entscheidet sich der Räuber, in der Stadt zu bleiben, in der er sich befindet, oder über eine direkte Verbindungsstraße in eine benachbarte Stadt zu reisen. In gleicher Weise kann jeder der Polizisten jeden Tag entscheiden, an seinem Standort zu bleiben oder in eine benachbarte Stadt zu reisen. Dabei stimmen sich die Polizisten ab. Der Räuber ist gefangen, sobald er sich zum gleichen Zeitpunkt in derselben Stadt befindet wie einer der Polizisten. Man zeige, dass die Polizisten den Räuber stets fangen können.

Aufgabe 9. Für eine positive ganze Zahl n betrachte man alle nirgends steigenden Funktionen $f\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$. Manche von ihnen haben einen Fixpunkt (d.h., es gibt ein c mit $f(c) = c$), andere haben keinen Fixpunkt. Man bestimme die Differenz der Anzahlen der beiden Arten von Funktionen.

Anmerkung: Eine Funktion f ist *nirgends steigend*, falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $x \leq y$ gilt.

Aufgabe 10. Gegeben sind 2019 Punkte in der Ebene. Ein Kind möchte k (abgeschlossene) Kreisscheiben derart zeichnen, dass für je zwei verschiedene dieser Punkte mindestens eine der Scheiben genau einen der beiden Punkte enthält. Was ist das kleinste k, so dass es für jede Ausgangskonfiguration von Punkten möglich ist, k Scheiben mit dieser Eigenschaft zu zeichnen?

Aufgabe 11. Sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC$ und M der Mittelpunkt der Seite BC. Die Kreise mit den Durchmessern AC und BM schneiden sich außer in M noch im Punkt P. Die Gerade MP schneidet AB in Q. Weiterhin sei R ein Punkt auf AP mit $QR \parallel BP$. Man beweise, dass CP den Winkel $\angle RCB$ halbiert.

Aufgabe 12. Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Außerdem seien D und E Punkte auf der Strecke AC bzw. auf der Geraden BC mit $BC \perp DE$. Man beweise, dass $EH \perp BD$ genau dann gilt, wenn BD die Strecke AE halbiert.

Aufgabe 13. Sei $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck mit $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ und $\angle ABC = \angle EFA = 90^\circ$. Man zeige, dass $AD \perp CE$ gilt.

Aufgabe 14. Seien ABC ein Dreieck mit $\angle ABC = 90^\circ$ und H der Fußpunkt der Höhe von B auf AC. Die Mittelpunkte der Strecken AH und CH seien mit M bzw. N bezeichnet. Der Umkreis des Dreiecks ABC schneide die Geraden BM und BN außer in B in den Punkten P bzw. Q. Die Strecken AQ und CP schneiden sich im Punkt R. Man beweise, dass die Gerade BR die Strecke MN halbiert.

Aufgabe 15. Man betrachte ein (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon $P_1P_2\dots P_n$ in der Ebene, wobei $n \geq 4$ ist. Angenommen, für jede Ecke P_k gibt es eine eindeutig bestimmte Ecke $Q_k \neq P_k$ unter $P_1,\dots,P_n$, die ihr am nächsten liegt. Das Polygon heißt dann *unfreundlich*, falls $Q_k \neq P_{k\pm1}$ für alle k gilt. Hierbei sei $P_0 = P_n$ und $P_{n+1} = P_1$.

(a) Man zeige, dass kein unfreundliches Polygon konvex ist.
(b) Man bestimme alle $n \geq 4$, für die es ein unfreundliches Polygon mit n Ecken gibt.

Aufgabe 16. Für eine positive ganze Zahl N sei $f(N)$ die Anzahl derjenigen geordneten Paare (a,b) positiver ganzer Zahlen, für die die Zahl

$$\frac{ab}{a+b}$$

ein Teiler von N ist. Man beweise, dass $f(N)$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 17. Sei p eine ungerade Primzahl. Man zeige: Für jede ganze Zahl c gibt es eine ganze Zahl a mit

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

Aufgabe 18. Seien a, b und c ungerade natürliche Zahlen, wobei a keine Quadratzahl ist. Außerdem gelte

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Man beweise, dass mindestens eine der Zahlen $b^2 + b + 1$ und $c^2 + c + 1$ zusammengesetzt ist.

Aufgabe 19. Man zeige, dass es keine positiven ganzen Zahlen x, y und z mit $7^x = 1 + y^2 + z^2$ gibt.

Aufgabe 20. Man betrachte ein Polynom $P(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Es gelte

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40 \quad \text{und} \quad P(-5) = -156.$$

Wie viele ganze Zahlen x mit

$$P(P(x)) = x^2$$

kann es höchstens geben?