Baltic Way 2019

Szczecin, Poland

17. marraskuuta, 2019

Version: Finnish

Sallittu aika: 4.5 tuntia.

Kysymyksiä saa esittää ensimmäisen 30 minuutin aikana.

Vain kirjoittamiseen ja piirtämiseen tarkoitetut työvälineet ovat sallittuja.

Tehtävä 1. Osoita, että kaikilla ei-negatiivisilla reaaliluvuilla x, y, z, joilla pätee $x \geq y$, on voimassa

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x - y)\sqrt{xyz}.$$

Tehtävä 2. Olkoon (F_n) jono, joka määritellään rekursiivisesti asettamalla $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, kun $n \geq 2$. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (x, y), joilla on

$$5F_x - 3F_y = 1.$$

Tehtävä 3. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla pätee

$$f(xf(y) - y^2) = (y + 1)f(x - y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 4. Etsi kaikki kokonaisluvut n, joita kohti on olemassa sellainen kokonaisluku $k \geq 2$ ja sellaiset positiiviset kokonaisluvut $x_1, x_2, \ldots, x_k$, että pätee

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \quad \text{ja} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

Tehtävä 5. Taululle on kirjoitettu $2m$ lukua

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m + 1),$$

missä $m \geq 2$ on kokonaisluku. Yksi *askel* koostuu kolmen luvun a, b ja c valitsemisesta, niiden pyyhkimisestä pois taululta ja luvun

$$\frac{abc}{ab + bc + ca}$$

kirjoittamisesta tilalle. Kun $m - 1$ askelta on toteutettu, niin taululla on enää kaksi lukua jäljellä. Olettaen, että toinen näistä on $\frac{4}{3}$, osoita, että toinen on suurempi kuin 4.

Tehtävä 6. Alice ja Bob pelaavat seuraavaa peliä: He kirjoittavat kunkin lausekkeista $x + y$, $x - y$, $x^2 + xy + y^2$ ja $x^2 - xy + y^2$ eri korteille. Nämä neljä korttia sekoitetaan ja asetetaan kuvapuoli alaspäin pöydälle. Yksi korteista käännetään ympäri, jolloin siinä oleva lauseke tulee näkyviin. Tämän jälkeen Alice valitsee mitkä tahansa kaksi neljästä kortista ja ojentaa kaksi muuta korttia Bobille. Sitten kaikki korteissa olevat lausekkeet paljastetaan. Tämän jälkeen Alice valitsee joko muuttujan x tai muuttujan y, asettaa sille jonkin reaalisen arvon sekä kertoo Bobille, minkä muuttujan ja minkä arvon hän valitsi. Tämän jälkeen Bob asettaa toiselle muuttujalle jonkin reaalisen arvon.

Lopuksi molemmat pelaajat laskevat omissa kahdessa kortissaan olevien lukujen tulon. Se kumpi saa suuremman tuloksen, voittaa pelin. Kummalla pelaajalla, jos kummallakaan, on voittostrategia?

Tehtävä 7. Etsi pienin kokonaisluku $k \geq 2$, jolla millä tahansa joukon $\{2, 3, \ldots, k\}$ osituksella kahteen osaan ainakin toinen osa sisältää (ei välttämättä erisuuret) luvut a, b ja c, joilla on voimassa $ab = c$.

Tehtävä 8. Baltiantie-maassa on 2019 kaupunkia. Jotkin näiden kaupunkien parit on yhdistetty toisiaan leikkaamattomilla kaksisuuntaisilla teillä. Kukin tie yhdistää täsmälleen kaksi kaupunkia. Tiedetään, että mistä tahansa kaupungista A voidaan ajaa kaupunkiin B käyttäen korkeintaan kahta tietä. Lisäksi maassa on 62 poliisia, jotka yrittävät napata rosvon. Poliisit ja rosvo tietävät toistensa sijainnit kaikkina ajanhetkinä. Joka yö rosvo voi pysyä sen hetkisessä kaupungissaan tai siirtyä naapurikaupunkiin tietä pitkin. Joka päivä kukin poliisi tekee saman päätöksen pysymisestä sen hetkisessä kaupungissa tai siirtymisestä naapurikaupunkiin. Poliisit sovittavat siirtymisiään yhteen. Rosvo saadaan kiinni, jos hän ja jokin poliiseista ovat samassa kaupungissa samaan aikaan. Osoita, että poliisit voivat aina saada rosvon kiinni.

Tehtävä 9. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja tarkastellaan kaikkia väheneviä funktioita $f\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$. Joillain näistä on kiintopiste (eli piste c, jolla pätee $f(c) = c$) ja joillain ei. Etsi näiden kahden funktiojoukon kokojen erotus.

Huomautus. Funktio f on *vähenevä*, jos ehto $f(x) \geq f(y)$ pätee kaikilla $x \leq y$.

Tehtävä 10. Tasoon on merkitty 2019 pistettä. Lapsi haluaa piirtää sellaiset k (suljettua) ympyräkiekkoa, että mitä tahansa kahta eri pistettä kohti on olemassa ympyräkiekko, joka sisältää täsmälleen toisen näistä pisteistä. Mikä on pienin luvun k arvo, jolla nämä k ympyräkiekkoa on mahdollista piirtää riippumatta alkuperäisistä pisteiden sijainneista?

Tehtävä 11. Olkoon ABC kolmio, jossa $AB = AC$. Olkoon M sivun BC keskipiste. Olkoot M ja P niiden ympyröiden leikkauspisteet, joiden halkaisijat ovat AC ja BM. Olkoon Q suorien MP ja AB leikkauspiste. Olkoon R sellainen piste suoralla AP, että $QR \parallel BP$. Osoita, että CP puolittaa kulman $\angle RCB$.

Tehtävä 12. Olkoon ABC kolmio ja H sen ortokeskus. Olkoon D piste janalla AC, ja olkoon E se piste janalla BC, jolla $BC \perp DE$. Osoita, että $EH \perp BD$ jos ja vain jos BD puolittaa janan AE.

Tehtävä 13. Olkoon $ABCDEF$ konveksi kuusikulmio, jossa $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ ja $\angle ABC = \angle EFA = 90^\circ$. Osoita, että $AD \perp CE$.

Tehtävä 14. Olkoon ABC kolmio, jossa $\angle ABC = 90^\circ$, ja olkoon H kärjestä B piirretyn korkeusjanan kantapiste. Pisteet M ja N ovat sivujen AH ja CH keskipisteet (tässä järjestyksessä). Olkoot P ja Q suorien BM ja BN toiset leikkauspisteet kolmion ABC ympärysympyrän kanssa (tässä järjestyksessä). Janat AQ ja CP leikkaavat pisteessä R. Todista, että suora BR kulkee janan MN keskipisteen kautta.

Tehtävä 15. Tutkitaan (ei välttämättä konveksia) tason monikulmiota $P_1P_2\ldots P_n$, missä $n \geq 4$. Oletetaan, että kaikille P_k on olemassa sellainen yksikäsitteinen kärkipiste $Q_k \neq P_k$ kärkien $P_1,\ldots,P_n$ joukossa, joka on sitä lähimpänä. Monikulmiota $P_1P_2\ldots P_n$ kutsutaan tällöin *vihamieliseksi*, mikäli $Q_k \neq P_{k\pm1}$ kaikilla k (missä $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Osoita, että ei ole olemassa konveksia vihamielistä monikulmiota.
(b) Määritä kaikki $n \geq 4$, joilla on olemassa vihamielinen n-kulmio.

Tehtävä 16. Positiivista kokonaislukua N kohden määritellään $f(N)$ olemaan niiden järjestettyjen positiivisten kokonaislukujen parien (a,b) määrä, joilla

$$\frac{ab}{a+b}$$

on luvun N tekijä. Todista, että $f(N)$ on aina täydellinen neliö.

Tehtävä 17. Olkoon p pariton alkuluku. Todista, että kaikilla kokonaisluvuilla c on olemassa kokonaisluku a, jolla

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

Tehtävä 18. Olkoot a, b ja c parittomia positiivisia kokonaislukuja niin, että a ei ole täydellinen neliö ja

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Osoita, että vähintään toinen luvuista $b^2 + b + 1$ ja $c^2 + c + 1$ on yhdistetty luku.

Tehtävä 19. Osoita, että yhtälöllä $7^x = 1 + y^2 + z^2$ ei ole ratkaisuja positiivisten kokonaislukujen joukossa.

Tehtävä 20. Tutkitaan niitä kokonaislukukertoimisia polynomeja $P(x)$, joilla

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40 \quad \text{ja} \quad P(-5) = -156.$$

Mikä on suurin mahdollinen sellaisten kokonaislukujen x lukumäärä, joilla

$$P(P(x)) = x^2?$$