# Baltic Way 2019

Szczecin, Poland

17. NOVEMBER 2019
VERSION: ESTONIAN

LAHENDAMISAEG: $4\frac{1}{2}$ TUNDI.
KÜSIMUSI VÕIB KÜSIDA ESIMESE 30 MINUTI JOOKSUL.
KASUTADA VÕIB AINULT JOONESTUS- JA KIRJUTUSVAHENDEID.

**Ülesanne 1.** Tõesta kõigi mittenegatiivsete reaalarvude $x, y, z$ jaoks, kus $x \geq y$, võrratus

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x - y)\sqrt{xyz}.$$

**Ülesanne 2.** Jada $(F_n)$ on defineeritud rekursiivselt seostega $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, kui $n \geq 2$. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid $(x, y)$, mille korral $5F_x - 3F_y = 1$.

**Ülesanne 3.** Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nii et kõigi $x, y \in \mathbb{R}$ korral

$$f(xf(y) - y^2) = (y + 1)f(x - y).$$

**Ülesanne 4.** Leia kõik täisarvud $n$, mille jaoks leiduvad täisarv $k \geq 2$ ja positiivsed täisarvud $x_1, x_2, \ldots, x_k$, nii et

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \quad \text{ja} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

**Ülesanne 5.** Tahvlile on kirjutatud $2m$ arvu

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m + 1),$$

kus $m \geq 2$ on täisarv. *Käik* seisneb kolme arvu $a$, $b$, $c$ valimises ning nende asendamises ühe uue arvuga

$$\frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

Pärast $m - 1$ käiku jääb tahvlile ainult kaks arvu. Eeldades, et üks neist on $\frac{4}{3}$, tõesta, et teine on suurem kui 4.

**Ülesanne 6.** Sandra ja Oleg mängivad järgmist mängu. Nad kirjutavad avaldised $x + y$, $x - y$, $x^2 + xy + y^2$ ja $x^2 - xy + y^2$ eraldi kaartidele. Need neli kaarti segatakse ja asetatakse lauale, avaldisega allpool. Üks kaartidest keeratakse ümber, nii et avaldis on näha, pärast mida võtab Sandra endale ükskõik missugused kaks kaarti ja annab teised kaks Olegile. Siis avatakse kaartidele kirjutatu. Nüüd valib Sandra ühe muutujatest $x$ ja $y$, määrab sellele reaalarvulise väärtuse ja ütleb Olegile, mis väärtuse ja millisele muutujale ta määras. Seejärel määrab Oleg reaalarvulise väärtuse teisele muutujale.

Lõpuks arvutavad nad oma kaartidel olevate avaldiste väärtuste korrutise. Võidab see, kellel on suurem korrutis. Kummal mängijal, kui üldse, on võitev strateegia?

**Ülesanne 7.** Leia vähim täisarv $k \geq 2$, mille korral hulga $\{2, 3, \ldots, k\}$ igal jagamisel kaheks osaks sisalduvad vähemalt ühes neist (mitte tingimata erinevad) arvud $a$, $b$ ja $c$, nii et $ab = c$.

**Ülesanne 8.** Baltiketimaa riigis on 2019 linna. Mõned linnade paarid on ühendatud mittelõikuvate kahesuunaliste teedega, iga tee ühendab täpselt kaht linna. On teada, et iga linnadepaari $A$ ja $B$ jaoks on võimalik sõita linnast $A$ linna $B$ kasutades ülimalt 2 teed. Riigis on 62 võmmi, kes püüavad pätti. Võmmid ja pätt teavad kõik üksteise asukohta igal ajahetkel. Igal öösel võib pätt jääda samasse linna, kus ta parasjagu on, või liikuda naaberlinna, kasutades selleks ühte teedest. Iga päev on igal võmmil sama valik, jääda paigale või liikuda, ja võmmid teevad omavahel koostööd. Pätt püütakse kinni, kui ta on ükskõik missugusel ajahetkel võmmiga samas linnas. Tõesta, et võmmid saavad alati päti kinni püüda.

**Ülesanne 9.** Vaatame kõiki mittekasvavaid funktsioone $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ mingi positiivse täisarvu $n$ jaoks. Mõnel neist on püsipunkt (st leidub $c$, nii et $f(c) = c$), mõnel ei ole. Leia nende kahe funktsioonide hulga elementide arvude vahe.

*Märkus.* Funktsioon $f$ on *mittekasvav*, kui $f(x) \geq f(y)$ kehtib kõigi $x \leq y$ jaoks.

**Ülesanne 10.** Tasandil on 2019 punkti. Laps soovib joonistada $k$ ringi nii, et iga kahe erineva punkti jaoks leidub ring, mis katab täpselt üht neist kahest punktist. Mis on vähim $k$, mille puhul on iga algse punktide konfiguratsiooni jaoks võimalik joonistada $k$ ringi, mis eelmainitud omadust rahuldavad?

**Ülesanne 11.** Olgu $ABC$ kolmnurk, milles $|AB| = |AC|$. Olgu $M$ külje $BC$ keskpunkt. Lõikugu ringjooned diameetritega $AC$ ja $BM$ punktides $M$ ja $P$. Lõikugu $MP$ sirgega $AB$ punktis $Q$. Olgu selline $R$ punkt sirgel $AP$, et $QR \parallel BP$. Tõesta, et $CP$ poolitab nurga $\angle RCB$.

**Ülesanne 12.** Olgu $ABC$ kolmnurk ja $H$ selle kõrguste lõikepunkt. Olgu $D$ selline punkt lõigul $AC$ ja $E$ selline punkt sirgel $BC$, et $BC \perp DE$. Tõesta, et $EH \perp BD$ siis ja ainult siis, kui $BD$ poolitab $AE$.

**Ülesanne 13.** Olgu $ABCDEF$ kumer kuusnurk, milles $|AB| = |AF|$, $|BC| = |CD|$, $|DE| = |EF|$ ja $\angle ABC = \angle EFA = 90°$. Tõesta, et $AD \perp CE$.

**Ülesanne 14.** Olgu $ABC$ kolmnurk, milles $\angle ABC = 90°$, ja olgu $H$ tipust $B$ tõmmatud kõrguse aluspunkt. Punktid $M$ ja $N$ on vastavalt lõikude $AH$ ja $CH$ keskpunktid. Olgu $P$ ja $Q$ vastavalt kolmnurga $ABC$ ümberringjoone teised lõikepunktid sirgetega $BM$ ja $BN$. Lõigud $AQ$ ja $CP$ lõikuvad punktis $R$. Tõesta, et sirge $BR$ läbib lõigu $MN$ keskpunkti.

**Ülesanne 15.** Olgu $n \geq 4$ ja vaatleme tasandil (mitte tingimata kumerat) hulknurka $P_1P_2 \dots P_n$. Leidugu iga $P_k$ jaoks tippude $P_1, \dots, P_n$ hulgas üheselt määratud tipp $Q_k \neq P_k$, mis on talle kõige lähemal. Hulknurka nimetame sellisel juhul *vaenulikuks*, kui ühegi $k$ korral $Q_k \neq P_{k\pm1}$ (kus $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Tõesta, et ükski vaenulik hulknurk pole kumer.
(b) Leia kõik $n \geq 4$, mille jaoks leidub vaenulik $n$-nurk.

**Ülesanne 16.** Positiivse täisarvu $N$ jaoks olgu $f(N)$ selliste järjestatud positiivsete täisarvude paaride $(a, b)$ arv, et

$$\frac{ab}{a+b}$$

on arvu $N$ jagaja. Tõesta, et $f(N)$ on alati täisarvu ruut.

**Ülesanne 17.** Olgu $p$ paaritu algarv. Tõesta, et iga täisarvu $c$ jaoks leidub selline täisarv $a$, et

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

**Ülesanne 18.** Olgu $a$, $b$, ja $c$ paaritud positiivsed täisarvud, nii et $a$ pole täisarvu ruut ning

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Tõesta, et vähemalt üks arvudest $b^2 + b + 1$ ja $c^2 + c + 1$ on kordarv.

**Ülesanne 19.** Tõesta, et võrrandil $7^x = 1 + y^2 + z^2$ pole lahendeid positiivsetes täisarvudes.

**Ülesanne 20.** Vaatleme täisarvuliste kordajatega polünoomi $P(x)$, mis rahuldab tingimusi

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40 \quad \text{ja} \quad P(-5) = -156.$$

Mis on suurim võimalik arv täisarve $x$, mille korral

$$P(P(x)) = x^2?$$