Varighed: 4,5 time.
Spørgsmål kan stilles de første 30 minutter.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladt.

Opgave 1. Bevis følgende ulighed for alle reelle tal x, y, z, hvor $x \geq y$

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x - y)\sqrt{xyz}.$$

Opgave 2. Lad (F_n) være den rekursivt definerede følge givet ved $F_1 = F_2 = 1$ og $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ for $n \geq 2$. Bestem alle par af positive hele tal (x, y) så

$$5F_x - 3F_y = 1.$$

Opgave 3. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$f(xf(y) - y^2) = (y + 1)f(x - y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 4. Bestem alle heltal n for hvilke der findes et helt tal $k \geq 2$ og positive heltal $x_1, x_2, \ldots, x_k$ så

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \quad \text{og} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

Opgave 5. Lad $m \geq 2$ være et helt tal. Følgende $2m$ tal står på en tavle

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m + 1).$$

Et *træk* består af at vælge tre tal a, b, c, slette dem fra tavlen og i stedet skrive tallet

$$\frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

Efter $m - 1$ træk er der kun to tal tilbage på tavlen. Vis at hvis det ene tal er $\frac{4}{3}$, så er det andet større end 4.

Opgave 6. Alice og Bob spiller følgende spil med fire kort. De skriver udtrykkene $x + y$, $x - y$, $x^2 + xy + y^2$ og $x^2 - xy + y^2$ på hver sit kort. De fire kort bliver blandet og placeres dernæst på et bord med forsiden nedad. Nu vendes et af kortene så man kan se udtrykket, der er skrevet på det. Dernæst vælger Alice to vilkårlige af de fire kort og giver de andre to til Bob, og så vendes alle kortene. Nu vælger Alice en af de variable x og y og tildeler den en reel værdi, hvorefter hun fortæller variablen og værdien til Bob. Derefter tildeler Bob den anden variabel en reel værdi.

Til slut udregner de begge produktet af værdierne på deres to kort. Den der får det største produkt vinder. Hvilken spiller, hvis nogen, har en vindende strategi?

Opgave 7. Bestem det mindste hele tal $k \geq 2$ sådan at det for enhver partition af mængden $\{2, 3, \ldots, k\}$ i to dele gælder at mindst en af disse dele indeholder (ikke nødvendigvis forskellige) tal a, b og c hvor $ab = c$.

Opgave 8. Der er 2019 byer i Balticwayland. Nogle par af byer er forbundet af ikke skærende veje hvor hver vej forbinder præcis to byer. Man kan køre begge veje på alle vejene. Det vides at for hvert par af byer A og B er det muligt at køre fra A til B ad højst to veje. I Balticwayland prøver 62 politifolk at fange en røver. Politifolkene og røveren kender altid hinandens positioner. Hver nat kan røveren vælge at blive i sin nuværende by eller tage til en naboby via en direkte vej. Hver dag kan hver politimand på samme måde vælge at blive eller at flytte sig, og de koordinerer den måde de flytter sig på. Røveren bliver fanget i det sekund hun er i den samme by som en politimand. Bevis at politifolkene altid kan fange røveren.

Opgave 9. Betragt for et positivt heltal n alle ikke-voksende funktioner $f\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$. Nogle af dem har et fikspunkt (dvs. et c så $f(c) = c$), mens andre ikke har. Bestem forskellen på kardinaliteten af de to mængder af funktioner.

Bemærkning. En funktion f er *ikke-voksende* hvis $f(x) \geq f(y)$ for alle $x \leq y$.

Opgave 10. Der er 2019 punkter givet i planen. Et barn vil gerne tegne k (lukkede) cirkelskiver på en sådan måde at for hvert par af punkter findes der en cirkelskive, som præcis et af punkterne ligger på. Hvad er det mindste k så det for enhver konfiguration af punkter er muligt at tegne k cirkler med denne egenskab?

Opgave 11. Lad ABC være en trekant, hvor $|AB| = |AC|$. Lad M være midtpunktet af linjestykket BC. Cirklerne med diametrene AC og BM skærer hinanden i punkterne M og P. Kald skæringspunktet mellem MP og AB for Q. Lad R være et punkt på AP, så $QR \parallel BP$. Vis at CP halverer $\angle RCB$.

Opgave 12. Lad ABC være en trekant og H være højdernes skæringspunkt. Lad D være et punkt, der ligger på AC og lad E være punktet på linjen BC så $BC \perp DE$. Vis at $EH \perp BD$ netop når BD går gennem midtpunktet af linjestykket AE.

Opgave 13. Lad $ABCDEF$ være en konveks hexagon i hvilken $|AB| = |AF|$, $|BC| = |CD|$, $|DE| = |EF|$ og $\angle ABC = \angle EFA = 90^\circ$. Bevis at $AD \perp CE$.

Opgave 14. Lad ABC være en trekant, hvor $\angle ABC = 90^\circ$, og lad H være fodpunktet for højden fra B. Punkterne M og N er midtpunkterne af henholdsvis AH og CH. Lad P og Q være det andet skæringspunkt mellem den omskrevne cirkel til trekant ABC og henholdsvis BM og BN. Linjestykkerne AQ og CP skærer hinanden i punktet R. Bevis at linjen BR går gennem midtpunktet af MN.

Opgave 15. Lad $n \geq 4$ og betragt en (ikke nødvendigvis konveks) plan polygon $P_1P_2\ldots P_n$, der ikke skærer sig selv. Antag, at der for hvert P_k findes et unikt hjørne $Q_k \neq P_k$ blandt $P_1,\ldots,P_n$, som ligger tættest på P_k. I så fald kaldes polygonen *fjendtlig* hvis $Q_k \neq P_{k\pm1}$ for alle k (hvor $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Bevis at ingen fjendtlige polygoner er konvekse.
(b) Find alle $n \geq 4$ for hvilke der findes en fjendtlig polygon med n kanter.

Opgave 16. Lad N være et positivt helt tal, og lad $f(N)$ være antallet af ordnede par af positive heltal (a,b) så tallet

$$\frac{ab}{a+b}$$

er divisor i N. Bevis at $f(N)$ altid er et kvadrattal.

Opgave 17. Lad p være et ulige primtal. Vis at der for ethvert helt tal c findes et helt tal a, så

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

Opgave 18. Lad a, b, og c være ulige, positive hele tal, så a ikke er et kvadrattal og

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Bevis at mindst et af tallene $b^2 + b + 1$ og $c^2 + c + 1$ er sammensat.

Opgave 19. Bevis at ligningen $7^x = 1 + y^2 + z^2$ ikke har nogen løsninger blandt de positive hele tal.

Opgave 20. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter, som opfylder

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40, \quad \text{og} \quad P(-5) = -156.$$

Hvad er det størst mulige antal heltallige løsninger til ligningen

$$P(P(x)) = x^2?$$